11. évfolyam szakgimnázium, I. forduló

pontozási útmutató

1. Az elmúlt négy hónapban többször változtatták a benzin árát. Az első hónapban 3%-kal, a másodikban 7%-kal, a harmadikban 5%-kal nőtt átlagosan a benzin ára. Hány százalékkal változott átlagosan a benzin ára a negyedik hónapban egész %-ra kerekítve, ha ebben a hónapban a benzin ára az első havi kezdeti ár egytizedével növekedett?

Megoldás:

A kezdeti benzin árat jelöljük A-val, akkor a hónap végén az új ár $A_1 = 1{,}03 \cdot A$. (2 pont)
A 2. hónap végén a benzin ára $A_2 = 1{,}07 \cdot A_1 = 1{,}07 \cdot 1{,}03 \cdot A$ (2 pont)
A 3. hónap végén a benzin ára $A_3 = 1{,}05 \cdot A_2 = 1{,}05 \cdot 1{,}07 \cdot 1{,}03 \cdot A \approx 1{,}157A$ (1 pont)
A 4. hónapban a benzin ára $0{,}1A$-val nőtt. A 4. hónapi ár az eredeti ár $1{,}257$-szorosa lett. A 4. havi átlagos áremelés %-át jelölje p, így a 4. hónap végén a benzin ára:

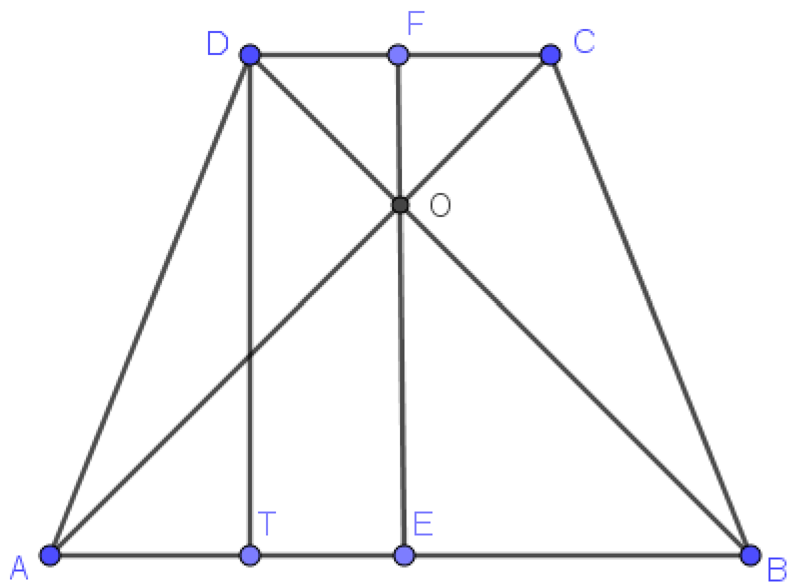
$$1{,}257A = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot A_3 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot 1{,}157A. \quad \text{(2 pont)}$$

Innen $\left(1 + \frac{p}{100}\right) \approx 1{,}086$, ahonnan $p \approx 8{,}6$. (2 pont)
Tehát a negyedik havi átlagos árváltozás egészre kerekített értéke 9%. (1 pont)
Összesen: 10 pont

2. Egy húrtrapéz alapjainak aránya 2 : 3. Középvonalának hossza 15 cm, átlói merőlegesek egymásra. Hány centiméter, illetve négyzetcentiméter a trapéz kerülete, illetve területe?

Megoldás:

Készítsünk ábrát, és használjuk annak a jelöléseit.



A feladat feltételei alapján $DC: AB = 2: 3$ és -t$(DC + AB): 2 = 15\ cm$. (1 pont)
Az egyenletrendszer megoldásai: $AB = 18\ cm, DC = 12\ cm$. (2 pont)
Az ABO, OCD egyenlőszárú derékszögű háromszögek, melyekben OE és OF az átfogókhoz tartozó magasságok, így

$$OE = 9\ cm, OF = 6\ cm.$$ (2 pont)

A trapéz magassága: $m = OE + OF = 9 + 6 = 15\ cm$. (1 pont)
A trapéz területe: $T = \frac{AB+DC}{2} \cdot m = \frac{18+12}{2} \cdot 15 = 225\ cm^2$. (1 pont)

$$AT = \frac{AB-DC}{2} = 3\ cm.$$ (1 pont)

A trapéz szárai egyenlő hosszúak és pl. AD-t Pitagorasz-tétellel számítjuk:
$AD = \sqrt{AT^2 + TD^2} = \sqrt{234}\ cm$. (1 pont)
A trapéz kerülete: $K = \left(30 + 2\sqrt{234}\right)\ cm$. (1 pont)
Összesen: **10 pont**

3. Egy szakgimnázium 11. évfolyamára járó diákok három szabadidős programból választhatnak. Vizisportokra 37-en, sakkozásra 34-en és társastáncra 39-en jelentkeztek, 16 tanuló nem választotta egyiket sem. A pontosan egy programot választók száma 11-szerese, a pontosan két programot választók száma 4-szerese a három programot választók számának.
   a) Hányan választottak legalább két programot?
   b) Hány tanuló jár a 11. évfolyamra?

Megoldás:

A három programot választók számát jelölje x. (1 pont)
A logikai szita szerint $37 + 34 + 39 = 11x + 2 \cdot 4x + 3 \cdot x$. (3 pont)
A fenti egyenletben a 2-es, illetve a 3-as szorzók azt jelentik, hogy a két programot választókat kétszer, illetve a három programot választókat háromszor, számoltuk össze. (2 pont)
A fenti egyenletet rendezve $110 = 22x$, a megoldás $x = 5$. (1 pont)
a) A legalább két programot választók száma: $4x + x = 25$. (2 pont)
b) Az évfolyam létszáma: $11 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 5 + 16 = 96$. (1 pont)
Összesen: **10 pont**

4. Jelölje A a $-x^2 + 2x + 24 \geq 0$ egyenlőtlenség, illetve B az $\left||x - 4| - 5\right| < 3$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát a valós számok halmazán.
   a) Mely egész számok tartoznak az A halmazhoz?
   b) Határozzuk meg az $A \cap B$ $és\ az$ $A \backslash B$ halmazokat.

Megoldás:

Mivel az $-x^2 + 2x + 24$ polinom gyökei $x_1 = -4, x_2 = 6$ és a másodfokú tag együtthatója negatív, ezért az egyenlőtlenség megoldáshalmaza $A = [-4; 6]$. (2 pont)
A második egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $-3 < |x - 4| - 5 < 3$. (1 pont)
Rendezve $2 < |x - 4| < 8$, ami a következőképpen írható
$2 < |x - 4|\ és\ |x - 4| < 8$. (1 pont)

Az első egyenlőtlenség megoldáshalmaza $x < 2$ vagy $x > 6$. (1 pont)
A második egyenlőtlenség megoldáshalmaza $-4 < x < 12$. (1 pont)
A két megoldáshalmaz metszete: $B =]-4;2[\cup]6;12[$. (1 pont)
a) Az A halmazhoz tartozó egész számok: -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. (1 pont)
b) $A \cap B =]-4;2[$, $A \setminus B = [2;6]$. (2 pont)

Összesen: **10 pont**

5. Hány négyjegyű számot készíthetünk a páros számjegyek felhasználásával, ha a számjegyek nem ismétlődhetnek?
a) Mennyivel egyenlő a fenti négyjegyű számok összege?
b) Hány 12-vel osztható szám van a fenti négyjegyű számok között?

Megoldás:

a) Az ezres helyi értékre négy számjegyből választhatunk (a nullát nem). (1 pont)
A százas helyi értékre négy, a tízes helyi értékre három és az egyes helyi értékre két számjegyből választhatunk. (1 pont)
A keresett négyjegyű számok száma: $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$. (1 pont)
Az ezres helyi értéken a négy számjegy mindegyike 24-szer szerepel, további helyi értékeken 18-szor, a nulla pedig 24-szer. (2 pont)
Így a megfelelő négyjegyű számok összege:
$$(24 \cdot 10^3 + 18 \cdot 10^2 + 18 \cdot 10 + 18) \cdot (8 + 6 + 4 + 2) = 519960.$$ (2 pont)

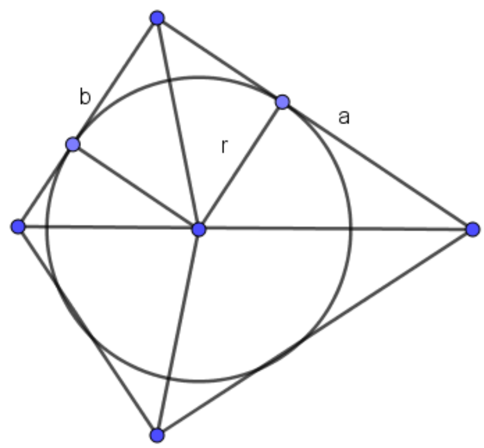
b) A néggyel és hárommal való oszthatóságot felhasználva az utolsó két számjegy mellett zárójelben az összes ilyen 12-vel osztható számok számát írtuk: 20(2), 40(4), 60(4), 80(2), 24(1), 48(1), 64(2), 68(1), 84(1), ami 18. (3 pont)

Összesen: **10 pont**

6. Egy deltoid két szemközti szöge derékszög. A derékszöget bezáró oldalak hossza *a* és *b*, a deltoid beírt körének sugarát jelölje *r*. Bizonyítsuk be, hogy
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Megoldás:

Készítsünk ábrát, és használjuk annak jelöléseit.



A beírt kör középpontját a deltoid csúcsaival összekötve azt négy olyan háromszögre bontjuk, melyek egy oldala a, illetve b és az ezekhez tartozó magasság r (a beírt kör sugara). (3 pont)

Írjuk fel a deltoid területét ennek a négy háromszögnek a területösszegeként

$$T = 2 \cdot \frac{a \cdot r}{2} + 2 \cdot \frac{b \cdot r}{2} = (a + b) \cdot r.$$ (2 pont)

Írjuk fel a deltoid területét két a, b befogójú derékszögű háromszög területösszegeként

$$T = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = a \cdot b.$$ (2 pont)

Így

$$a \cdot b = (a + b) \cdot r.$$ (1 pont)

Az egyenlet mindkét oldalát osztva $a \cdot b \cdot r$-rel, a bizonyítandó

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

egyenlőséget kapjuk. (2 pont)

Összesen: **10 pont**